

EL OSCILADOR ARMÓNICO Y EL PÉNDULO

Carlos Enrique Hernández Anguiano

Rafael Augusto Vázquez Reveles

Departamento de Física, Facultad de Ciencias, Universidad Nacional Autónoma de México,
Ciudad Universitaria, Circuito Exterior SN, Ciudad de México, México, C.P. 04510.

Resumen

El presente trabajo tuvo como objetivo estudiar el comportamiento oscilatorio de un péndulo simple y evaluar la dependencia del periodo con la longitud del sistema, así como describir sus componentes de posición mediante funciones periódicas. Para ello, se utilizaron distintas longitudes del péndulo entre 24.9 cm y 264.0 cm, manteniendo una amplitud inicial de $10^\circ \pm 0.5^\circ$. Los periodos se midieron con la función de péndulo del Smart Timer ME-8930, y el movimiento fue registrado en video para analizar la posición mediante Tracker. Posteriormente, los datos fueron ajustados con SciDAVis mediante modelos cosenoidales, radicales y lineales por cambio de variable. Los resultados mostraron que la posición horizontal se describió adecuadamente por un ajuste cosenoidal con frecuencia angular $\omega = 0.543 \text{ rad s}^{-1}$, mientras que la componente vertical presentó una frecuencia aproximada de $\omega = 1.087 \text{ rad s}^{-1}$, cercana al doble de la horizontal. La relación periodo-longitud siguió la tendencia $T(L) = 2.001\sqrt{L} + 0.047$, y el ajuste lineal con $X = \sqrt{L}$ produjo $T(X) = 0.052 + 1.996X$. A partir de estos ajustes se estimaron valores de g de $9.86 \frac{m}{s^2}$ y $9.92 \frac{m}{s^2}$. Se concluye que el sistema presentó una concordancia satisfactoria con el modelo teórico del péndulo simple en el régimen de pequeñas oscilaciones.

Palabras clave: péndulo simple; movimiento armónico simple; periodo; longitud; Tracker; SciDAVis.

Introducción

El péndulo simple es uno de los modelos más importantes para estudiar el movimiento oscilatorio en física, debido a que permite relacionar de manera directa la geometría del sistema con su comportamiento dinámico. De forma ideal, se considera formado por una masa puntual suspendida de un hilo inextensible y de masa despreciable, cuya longitud es L . Al separar la masa de su posición de equilibrio y soltarla, esta oscila bajo la acción de la gravedad y describe una trayectoria circular alrededor del punto de suspensión.

Para oscilaciones pequeñas, el movimiento del péndulo puede aproximarse como un movimiento armónico simple. En este caso, el periodo de oscilación está dado por la expresión

$$T = 2\pi\sqrt{\left(\frac{L}{g}\right)} \quad (1)$$

donde T representa el periodo, L la longitud del péndulo y g la aceleración de la gravedad. Esta relación muestra que el periodo aumenta con la raíz cuadrada de la longitud. Por lo tanto, un péndulo más largo tarda más tiempo en completar una oscilación que uno más corto. Además, en esta aproximación, el periodo no depende de la masa suspendida ni de forma significativa de la amplitud inicial, siempre que el ángulo de oscilación sea pequeño.

El movimiento también puede describirse mediante sus componentes espaciales. Si el origen se coloca en el punto de suspensión y el ángulo que forma el hilo con la vertical se representa como $\theta(t)$, la posición de la masa puede expresarse mediante las componentes

$$x(t) = L \sin(\theta(t)) \quad (2)$$

$$y(t) = -L \cos(\theta(t)) \quad (3)$$

La componente horizontal $x(t)$ describe el desplazamiento lateral de la masa y, para ángulos pequeños, puede aproximarse mediante una función senoidal o cosenoidal. Por esta razón, en un análisis experimental, la gráfica de posición horizontal contra tiempo suele presentar un comportamiento periódico característico. En cambio, la componente vertical $y(t)$ depende de la geometría circular de la trayectoria, por lo que su variación es menor y no se comporta exactamente igual que la componente horizontal. Esta diferencia permite distinguir el movimiento oscilatorio principal, asociado al desplazamiento horizontal, de la variación vertical producida por la trayectoria curva del péndulo. [1]

En conjunto, el péndulo simple permite estudiar cómo la longitud del sistema influye directamente en el periodo de oscilación y cómo el movimiento puede analizarse a partir de sus componentes horizontal y vertical. Esta descripción resulta útil tanto para el estudio teórico del movimiento armónico simple como para el análisis experimental mediante gráficas de posición en función del tiempo.

En el análisis experimental de sistemas oscilatorios, los ajustes mediante funciones seno y coseno constituyen una herramienta fundamental para describir fenómenos periódicos como el movimiento armónico simple, las oscilaciones de un péndulo o las señales registradas por sensores en función del tiempo. Este tipo de comportamiento puede representarse mediante una función sinusoidal general de la forma

$$y(t) = A \sin(\omega t + \varphi) + C \quad (4)$$

o, de manera equivalente,

$$y(t) = A \cos(\omega t + \varphi) + C \quad (5)$$

donde A representa la amplitud, ω la frecuencia angular, φ la fase inicial y C el desplazamiento vertical respecto al origen de referencia. La elección entre seno y coseno no modifica la física del sistema, ya que ambas funciones describen oscilaciones periódicas equivalentes, diferenciadas únicamente por un corrimiento de fase.

En este contexto, SciDAVis permite realizar ajustes no lineales a partir de datos experimentales, lo que facilita la estimación cuantitativa de los parámetros característicos del movimiento. De

acuerdo con la documentación del programa, el ajuste no lineal se realiza minimizando la diferencia cuadrática entre los datos experimentales y los valores calculados por la función propuesta; es decir, mediante un criterio de mínimos cuadrados. Esta metodología es especialmente útil cuando los datos no siguen una relación lineal simple, sino una dependencia periódica donde la amplitud, la frecuencia angular, la fase y el valor medio deben obtenerse a partir del ajuste.

El objetivo general del trabajo fue estudiar las propiedades del péndulo simple.

Para ello nos guiamos en los siguientes objetivos particulares

- Analizar a través de Tracker la relación posición tiempo y determinar los parámetros de la ecuación que describe el movimiento.
- Determinar la relación longitud-periodo.
- Calcular a partir de las ecuaciones de movimiento la aceleración g terrestre.

Metodología

El sistema experimental consistió en un hilo suspendido desde un gancho ubicado en el techo del laboratorio. Se realizaron mediciones del periodo de oscilación para distintas longitudes del péndulo: 264.0, 240.5, 217.7, 182.2, 157.2, 129.0, 108.5, 81.2, 56.7 y 24.9 cm, con una incertidumbre de ± 0.1 cm. La amplitud inicial se mantuvo constante, se midió angularmente y se fijó en $10^\circ \pm 0.5^\circ$. Los tiempos de oscilación se registraron utilizando la función de péndulo del Smart Timer ME-8930. Para una descripción detallada del funcionamiento del instrumento, se consultó el manual del fabricante [3].

Para medir el movimiento, se armó un sistema experimental compuesto por tres varillas que sostuvieron un péndulo con un hilo de longitud seleccionada. Posteriormente, se grabaron diez videos del movimiento y se analizó la posición del péndulo mediante el software Tracker. (Para mas detalles sobre el funcionamiento de tracker revisar nuestro trabajo sobre Movimiento de Projectiles)

Análisis y Resultados

Al graficar los datos de posición del péndulo tanto en el eje x como en el eje y , se observó un comportamiento oscilatorio aproximadamente cosenoidal. Por esta razón, se realizó un ajuste de tipo cosenoidal para describir la evolución temporal de ambas componentes de la posición, como se muestra en las Figuras 1 y 2.

El ajuste empleado correspondió a la forma cosenoidal de la ecuación (5), donde A representa la amplitud de oscilación, ω la frecuencia angular, ϕ la fase inicial y C el desplazamiento respecto al origen de referencia. Este modelo permitió caracterizar cuantitativamente el movimiento periódico del péndulo y estimar parámetros relevantes, como la frecuencia angular y el periodo de oscilación.

En el caso de un péndulo simple, el comportamiento armónico se espera principalmente para oscilaciones de pequeña amplitud, donde la aproximación $\sin \theta \approx \theta$ permite describir el movimiento mediante funciones sinusoidales o cosenoidales. Por ello, la concordancia entre los datos experimentales y el ajuste cosenoidal constituye una evidencia de que el sistema presentó un movimiento periódico compatible con el modelo teórico del péndulo en el régimen de pequeñas oscilaciones.

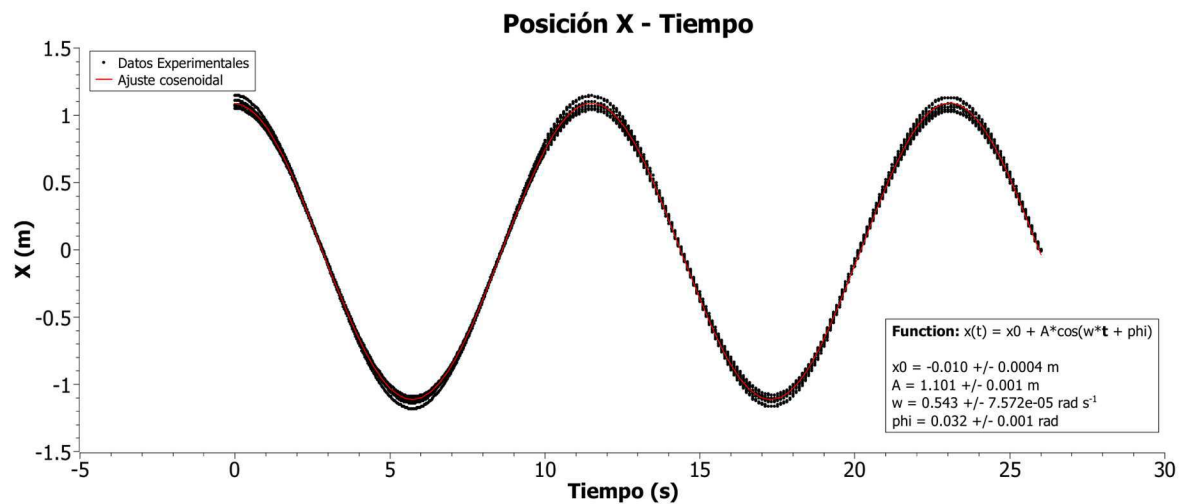


Figura 1. Posición horizontal X, en metros, como función del tiempo t, en segundos. El eje horizontal está etiquetado como Tiempo (s) y abarca aproximadamente de -5 a 30 s, aunque los datos experimentales comienzan cerca de $t = 0$ s. El eje vertical está etiquetado como X (m) y cubre un intervalo aproximado de -1.5 a 1.5 m. Los puntos negros corresponden a los datos experimentales, mientras que la línea roja representa un ajuste cosenoidal. La función empleada correspondió a la forma de la ecuación (5). Los parámetros visibles del ajuste son: $x_0 = -0.010 \pm 0.0004 \text{ m}$, $A = 1.101 \pm 0.001 \text{ m}$, $\omega = 0.543 \pm 7.572 \times 10^{-5} \text{ rad s}^{-1}$ y $\phi = 0.032 \pm 0.001 \text{ rad}$.

La posición horizontal presentó un comportamiento oscilatorio periódico bien descrito por una función cosenoidal. La amplitud fue cercana a 1.10 m, lo que indica una oscilación horizontal amplia respecto al origen elegido. El valor de x_0 fue pequeño en comparación con la amplitud, por lo que el movimiento estuvo prácticamente centrado alrededor de $X = 0$, con un ligero desplazamiento negativo del origen experimental.

La concordancia visual entre los datos experimentales y el ajuste fue alta durante casi todo el intervalo registrado. Las pequeñas discrepancias se observaron principalmente cerca de los máximos y mínimos, donde los errores de seguimiento pueden volverse más notorios debido al cambio de dirección del movimiento. No se aprecia una disminución fuerte de la amplitud, por lo que el amortiguamiento, si existió, fue pequeño durante el intervalo analizado.

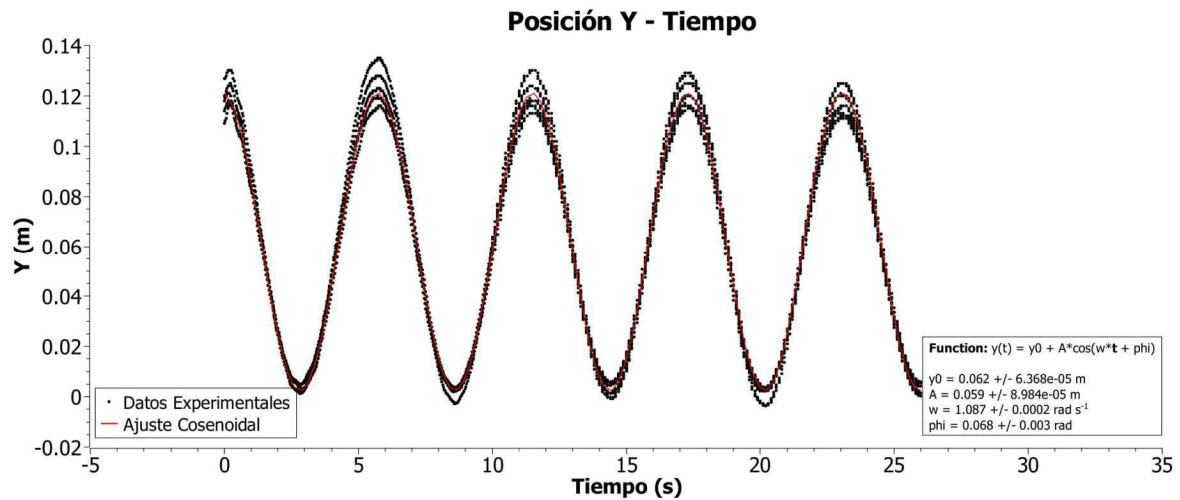


Figura 2. Posición vertical Y, en metros, como función del tiempo t, en segundos. El eje horizontal corresponde al Tiempo (s) y se extiende aproximadamente de -5 a 35 s, aunque los datos se concentran entre 0 y 25 s. El eje vertical está etiquetado como Y (m) y cubre aproximadamente de -0.02 a 0.14 m. Los puntos negros representan los datos experimentales y la línea roja corresponde al ajuste cosenoidal. La función usada correspondió a la forma de la ecuación (5). Los parámetros visibles del ajuste son: $y_0 = 0.062 \pm 6.368 \times 10^{-5}$ m, $A = 0.059 \pm 8.984 \times 10^{-5}$ m, $\omega = 1.087 \pm 0.0002$ rad s⁻¹ y $\phi = 0.068 \pm 0.003$ rad.

La coordenada vertical también presentó un comportamiento periódico, pero con una frecuencia angular aproximadamente doble respecto a la componente horizontal:

$$\omega_y \approx 1.087 \text{ rad s}^{-1} \quad (6)$$

mientras que

$$2\omega_x \approx 2(0.543) = 1.086 \text{ rad s}^{-1} \quad (7)$$

Esta relación es físicamente significativa. En un movimiento pendular, la posición vertical depende de la altura de la masa respecto al punto más bajo de la trayectoria. Como la masa alcanza alturas similares tanto en el extremo izquierdo como en el extremo derecho, la coordenada Y completa dos oscilaciones por cada oscilación completa de X. Por eso, la frecuencia vertical aparece aproximadamente duplicada.

La amplitud vertical fue mucho menor que la horizontal, con $A \approx 0.059$ m, lo cual es consistente con la geometría del movimiento pendular: la variación vertical suele ser más pequeña que el desplazamiento horizontal para oscilaciones no extremas. También se observa mayor dispersión relativa en los datos de Y, especialmente cerca de los máximos, algo esperable porque la escala vertical es más reducida y cualquier error de seguimiento representa una fracción mayor de la amplitud medida.

Posteriormente, se graficaron los valores del periodo en función de la longitud del péndulo. Los datos presentaron una relación de tipo radical, por lo que se realizó un ajuste de esta forma para describir el comportamiento experimental observado.

Esta elección se justificó a partir del modelo teórico del péndulo simple para pequeñas oscilaciones, presentado en la ecuación (1). De acuerdo con esta relación, el periodo aumenta

proporcionalmente a la raíz cuadrada de la longitud, por lo que un ajuste radical resulta adecuado para analizar la dependencia entre ambas variables.

La comparación entre el ajuste experimental y el modelo teórico permitió evaluar si el sistema se comportó de acuerdo con la aproximación ideal del péndulo simple, así como identificar posibles desviaciones asociadas a efectos de amplitud, fricción, resistencia del aire o incertidumbres en la medición de la longitud y del tiempo.

$$T(L) = a\sqrt{L} + b \quad (8)$$

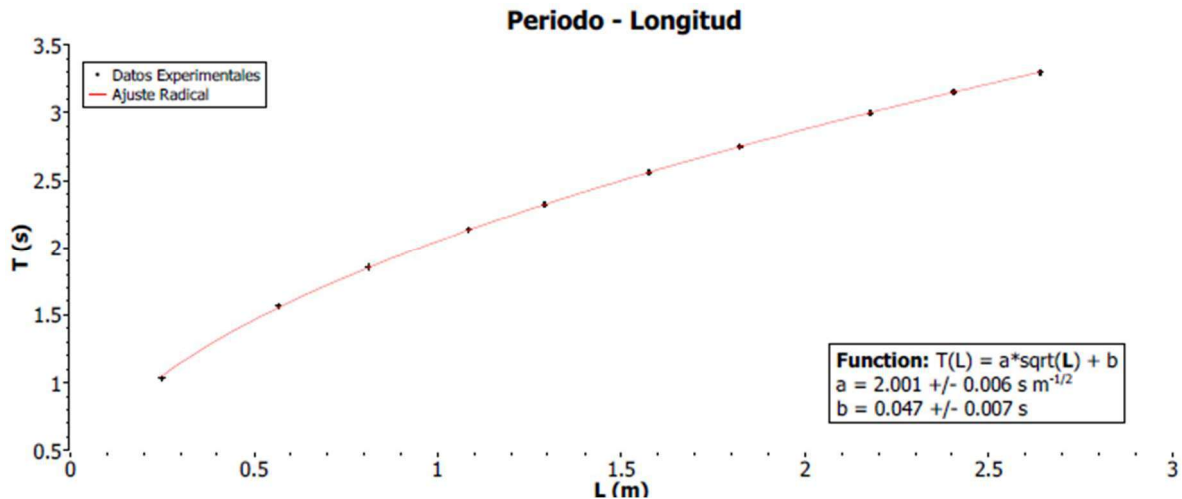


Figura 3. Periodo T, en segundos, como función de la longitud L, en metros. La escala horizontal abarca aproximadamente de 0 a 3 m y la escala vertical de 0.5 a 3.5 s. Los puntos negros corresponden a los datos experimentales, y la curva roja representa un ajuste radical. La función reportada en la gráfica corresponde a la ecuación (8), con los parámetros $a = 2.001 \pm 0.006 \text{ s m}^{-1/2}$ y $b = 0.047 \pm 0.007 \text{ s}$. La tendencia observada es creciente y no lineal, con una curvatura característica de una función proporcional a la raíz cuadrada de la longitud.

La gráfica evidencia que el periodo del péndulo aumenta conforme aumenta la longitud; sin embargo, no lo hace de manera lineal respecto a L, sino siguiendo una relación radical. Este comportamiento coincide con el modelo teórico del péndulo simple descrito por la ecuación (1). La función ajustada en la ecuación (8) representa adecuadamente la dependencia esperada, donde el parámetro a cumple el papel de

$$a = \frac{2\pi}{\sqrt{g}} \quad (9)$$

A partir del valor experimental $a = 2.001 \text{ s m}^{-1/2}$, se puede estimar la aceleración de la gravedad como

$$g = \left(\frac{2\pi}{a}\right)^2 \quad (10)$$

lo que da aproximadamente

$$g \approx 9.86 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \quad (11)$$

Este resultado es consistente con el valor esperado de la gravedad terrestre. La ordenada al origen $b = 0.047$ s, aunque pequeña, indica que el ajuste no pasa exactamente por el origen, lo cual puede deberse a errores sistemáticos o a condiciones experimentales no ideales.

Además de realizar el ajuste radical, se efectuó un cambio de variable con el propósito de aplicar un ajuste lineal mediante el método de mínimos cuadrados. Para ello, se consideró la relación teórica del péndulo simple descrita por la ecuación (1) y se definió la variable

$$X = \sqrt{L} \quad (12)$$

Al sustituir la ecuación (12) en la ecuación (1), la dependencia radical entre el periodo y la longitud se transforma en una relación lineal entre T y X :

$$T = \left(\frac{2\pi}{\sqrt{g}}\right) X \quad (13)$$

De manera equivalente, al elevar al cuadrado la ecuación (1), también se obtiene una relación lineal entre T^2 y L :

$$T^2 = \left(\frac{4\pi^2}{g}\right)L \quad (14)$$

La aplicación del método de mínimos cuadrados permitió obtener una recta que describe de forma cuantitativa la tendencia de los datos experimentales, reduciendo el efecto de las fluctuaciones aleatorias asociadas a la medición del periodo y de la longitud. La ecuación del ajuste lineal reportada fue

$$T(X) = 0.052 + 1.996X \quad (15)$$

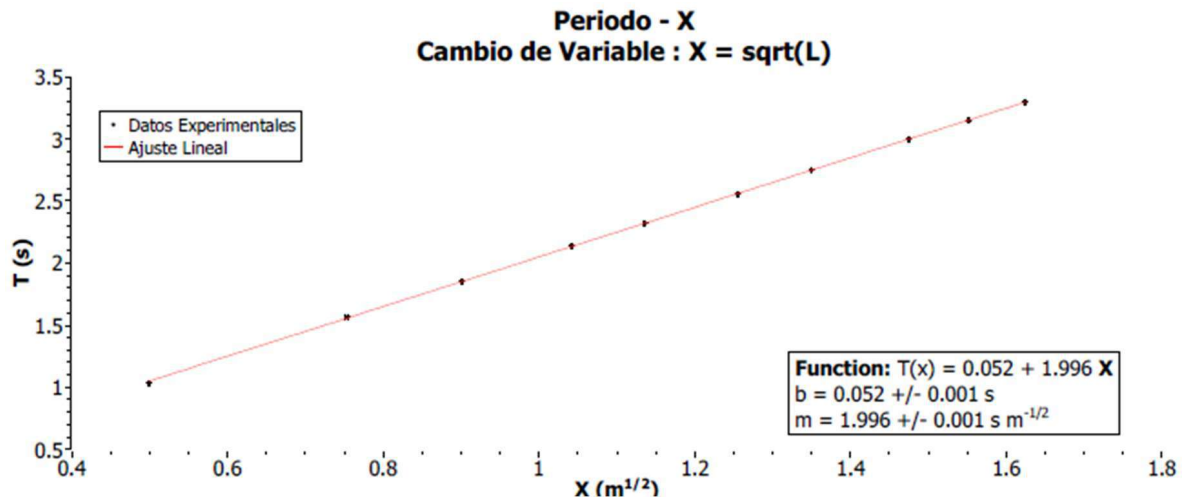


Figura 4. Periodo T , en segundos, como función de la variable transformada $X = \sqrt{L}$, con unidades de $\text{m}^{1/2}$. La escala horizontal abarca aproximadamente de 0.4 a 1.8 $\text{m}^{1/2}$, y la escala vertical de 0.5 a 3.5 s. Los puntos negros corresponden a los datos experimentales, mientras que la línea roja representa el ajuste lineal. La ecuación reportada para el ajuste corresponde a la ecuación (15), donde la ordenada al origen es $b = 0.052 \pm 0.001$ s y la pendiente es $m = 1.996 \pm 0.001 \text{ s m}^{-1/2}$.

La gráfica muestra una relación lineal creciente entre el periodo T y la variable transformada $X = \sqrt{L}$. Esto indica que, al aplicar el cambio de variable, los datos experimentales del péndulo simple se ajustaron adecuadamente a una dependencia proporcional entre T y $\sqrt{L}$. La pendiente obtenida, $m = 1.996 \text{ s m}^{-1/2}$, es cercana al valor teórico esperado para un péndulo simple, de acuerdo con la ecuación (13).

Por lo tanto, la pendiente experimental se puede asociar con

$$m = \frac{2\pi}{\sqrt{g}} \quad (16)$$

A partir de la pendiente experimental se puede estimar la aceleración de la gravedad mediante

$$g = \left(\frac{2\pi}{m}\right)^2 \quad (17)$$

Sustituyendo $m = 1.996 \text{ s m}^{-1/2}$, se obtiene aproximadamente

$$g \approx 9.92 \frac{\text{m}^2}{\text{s}} \quad (18)$$

Este valor es cercano al valor aceptado de la gravedad terrestre, lo que sugiere una buena concordancia entre el modelo teórico y los datos experimentales. La ordenada al origen distinta de cero, $b = 0.052 \text{ s}$, puede asociarse con errores sistemáticos, retardos instrumentales, incertidumbre en la medición del periodo o efectos no ideales del montaje.

Conclusiones

El estudio permitió caracterizar el comportamiento oscilatorio de un péndulo simple y verificar experimentalmente la dependencia del periodo con la longitud. Los registros de posición obtenidos mediante Tracker mostraron que la componente horizontal se ajustó adecuadamente a una función cosenoidal, con una frecuencia angular de 0.543 rad s^{-1} , mientras que la componente vertical presentó una frecuencia cercana al doble, 1.087 rad s^{-1} . Esta diferencia fue coherente con la geometría de la trayectoria pendular, ya que la altura de la masa alcanza valores equivalentes en ambos extremos de la oscilación.

La relación entre el periodo y la longitud presentó una tendencia radical, compatible con el modelo teórico del péndulo simple para pequeñas oscilaciones. El ajuste $T(L) = 2.001\sqrt{L} + 0.047$ permitió estimar una aceleración de la gravedad de aproximadamente 9.86 m/s^2 , mientras que el ajuste lineal aplicado al cambio de variable $X = \sqrt{L}$ condujo a un valor aproximado de 9.92 m/s^2 . Ambos resultados fueron cercanos al valor esperado de la gravedad terrestre, lo que indica una concordancia satisfactoria entre los datos experimentales y el modelo teórico.

Las pequeñas desviaciones observadas, como las ordenadas al origen distintas de cero y la dispersión en la coordenada vertical, pueden atribuirse a errores sistemáticos, incertidumbres instrumentales, efectos de seguimiento en video, resistencia del aire y condiciones no ideales del montaje. Como línea de trabajo futuro, sería conveniente repetir el experimento con mayor control de la amplitud inicial, mejorar la calibración espacial del video y comparar los resultados para

diferentes amplitudes angulares, con el fin de evaluar con mayor detalle los límites de validez de la aproximación de pequeñas oscilaciones.

Bibliografía

[1] R. A. Serway y J. W. Jewett, Física para ciencias e ingeniería, volumen 1, 9.^a edición, Cengage Learning, México, páginas sobre leyes de Newton.

[2] SciDAVis, *The SciDAVis Handbook*, sección “Fitting of data and curves / Non Linear Curve Fit”, disponible en: <https://highperformancecoder.github.io/scidavis-handbook/sec-fitting.html>, consultado el 11 de junio de 2026.

[3] PASCO scientific. (s. f.). *Smart Timer manual: ME-8930* (Manual No. 012-06734A). PASCO scientific.

[4] Datos obtenidos
https://drive.google.com/drive/folders/12j65QR7wifYotrzhzYCYeXvE_sC2uJH?usp=sharing