

Movimiento de Projectiles

Carlos Enrique Hernández Anguiano

Rafael Augusto Vázquez Reveles

Departamento de Física, Facultad de Ciencias, Universidad Nacional Autónoma de México,
Ciudad Universitaria, Circuito Exterior SN, Ciudad de México, México, C.P. 04510.

Resumen

El presente trabajo tuvo como objetivo estudiar el comportamiento de un proyectil lanzado con una velocidad inicial. Para ello, se empleó un lanzador de proyectiles Vernier y se registraron trayectorias mediante video para tres ángulos de lanzamiento: 30° , 45° y 60° , con una incertidumbre angular de $\pm 0.5^\circ$. Las posiciones horizontal y vertical del proyectil se obtuvieron con el software Tracker y posteriormente se ajustaron mediante modelos lineales y cuadráticos, respectivamente. Los resultados mostraron que la componente horizontal presentó una dependencia aproximadamente lineal con el tiempo, con velocidades de 2.872 m s^{-1} , 2.401 m s^{-1} y 1.658 m s^{-1} para 30° , 45° y 60° . En la componente vertical, los ajustes cuadráticos permitieron estimar velocidades iniciales de 1.653 m s^{-1} , 2.426 m s^{-1} y 2.916 m s^{-1} , así como aceleraciones verticales aproximadas de -8.904 m s^{-2} , -8.890 m s^{-2} y -9.070 m s^{-2} . En conjunto, los resultados confirmaron la independencia entre los movimientos horizontal y vertical, además de la validez experimental del modelo parabólico dentro de las incertidumbres y limitaciones del montaje.

Palabras clave: movimiento de proyectiles; análisis por video; Tracker; ajuste lineal; ajuste cuadrático; aceleración gravitacional.

Introducción

El movimiento de proyectiles constituye un caso fundamental de movimiento bidimensional en el que un cuerpo, una vez lanzado con una velocidad inicial, queda sometido principalmente a la acción de la gravedad. Desde una perspectiva física, este fenómeno se interpreta como la superposición de dos movimientos independientes: uno horizontal, idealmente uniforme en ausencia de resistencia del aire, y otro vertical, uniformemente acelerado por la gravedad. Matemáticamente, su descripción se expresa mediante ecuaciones paramétricas que relacionan la posición, la velocidad inicial, el ángulo de lanzamiento, el tiempo y la aceleración gravitatoria, lo que permite representar la trayectoria parabólica característica bajo condiciones ideales.

El estudio sistemático del movimiento de proyectiles se consolidó con Galileo Galilei, quien estableció que la trayectoria de un proyectil es parabólica al combinar el movimiento horizontal uniforme con la caída vertical acelerada. Posteriormente, Isaac Newton integró este fenómeno dentro de las leyes generales del movimiento y la gravitación, proporcionando una base dinámica más amplia para explicar la evolución temporal de los cuerpos sometidos a fuerzas. En la física moderna, el análisis se ha extendido al considerar factores no ideales, como la resistencia del aire, la rotación del proyectil, la sustentación y los efectos aerodinámicos, mediante modelos diferenciales y simulaciones computacionales.

La relevancia del movimiento de proyectiles permanece vigente debido a sus múltiples aplicaciones científicas y tecnológicas. Su estudio resulta esencial en ingeniería, balística, diseño mecánico, biomecánica deportiva, robótica, navegación y simulación física. Además, constituye un modelo pedagógico central para comprender la relación entre cinemática, dinámica y modelación matemática, pues permite vincular principios teóricos con fenómenos observables en contextos experimentales y aplicados.

Las ecuaciones de movimiento utilizadas en la metodología y en el análisis corresponden al modelo ideal de proyectil sin resistencia del aire. En este marco, las componentes horizontal y vertical de la posición y de la velocidad se expresan como: [1]

$$x(t) = x_0 + v_{0x}t \quad (1)$$

$$y(t) = y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 \quad (2)$$

$$v_x(t) = v_{0x} \quad (3)$$

$$v_y(t) = v_{0y} - gt \quad (4)$$

$$v_{0x} = v_0 \cos \theta \quad (5)$$

$$v_{0y} = v_0 \sin \theta \quad (6)$$

En el contexto del análisis de movimiento, un tracker es una herramienta de seguimiento digital que permite determinar la posición de un cuerpo a partir de registros de video, asociando cada cuadro con coordenadas espaciales y temporales. Programas como Tracker Video Analysis, desarrollado dentro del proyecto Open Source Physics, permiten calibrar la escala de la imagen, definir un sistema de referencia, marcar manual o automáticamente la trayectoria de un objeto y obtener datos de posición, velocidad y aceleración en función del tiempo. Este tipo de herramienta constituye un recurso computacional de análisis cinemático, ya que transforma información visual en datos cuantitativos susceptibles de ajuste matemático y comparación experimental.

El uso de técnicas de seguimiento de movimiento en física experimental ha evolucionado desde métodos manuales basados en observaciones directas, cronofotografía y medición sobre placas fotográficas, como en los trabajos de Étienne-Jules Marey y Eadweard Muybridge, hasta sistemas digitales capaces de procesar videos con alta resolución temporal y espacial. Esta transición ha permitido reducir la dependencia de mediciones aisladas y aumentar la cantidad de datos disponibles para describir trayectorias.

En el estudio del movimiento de proyectiles, el tracker resulta relevante porque permite verificar experimentalmente los modelos cinemáticos que predicen movimiento horizontal uniforme y movimiento vertical uniformemente acelerado. Al obtener trayectorias, tiempos de vuelo, velocidades iniciales y aceleraciones, facilita contrastar las ecuaciones teóricas con datos experimentales reales. [2]

El objetivo general en este trabajo fue estudiar el comportamiento de un proyectil lanzado con una velocidad inicial.

- Para ello nos apoyamos en los siguientes objetivos particulares:
- Determinar correlación posición horizontal-tiempo.
- Obtener parámetros que lo describen.
- Determinar correlación posición vertical-tiempo.
- Obtener parámetros que lo describen.

- Medir la magnitud de la velocidad inicial.

Metodología

Se montó un sistema experimental con un lanzador de proyectiles Vernier, como se muestra en la Figura 1. Para estudiar el movimiento del proyectil, se grabaron cinco trayectorias para cada una de las tres configuraciones experimentales, en las cuales se varió el ángulo de lanzamiento: 30° , 45° y 60° , con una incertidumbre de $\pm 0.5^\circ$. Posteriormente, se midió la posición del proyectil utilizando el software Tracker.

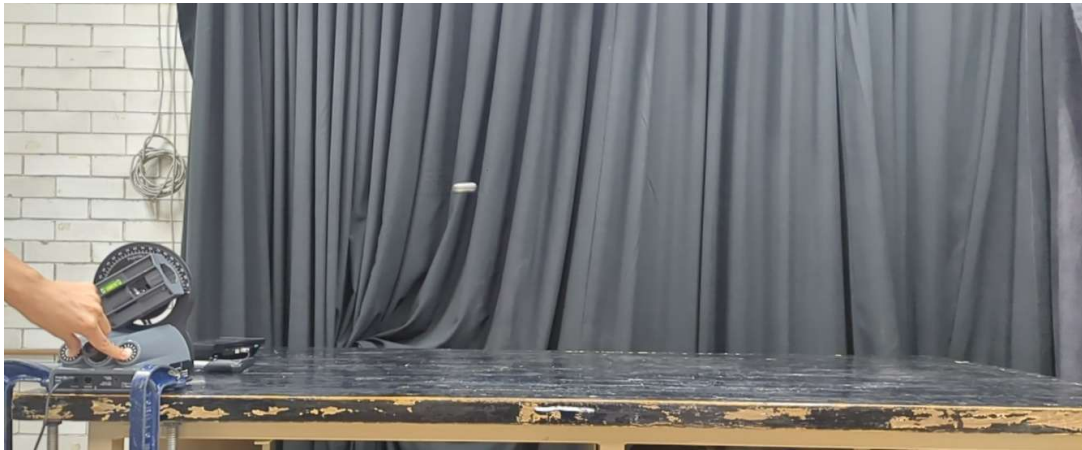


Figura 1. Lanzador de proyectiles desde la perspectiva de la cámara utilizada para la grabación. Se observa el balón saliendo del lanzador.

El uso de grabaciones de video permitió obtener la evolución temporal de las coordenadas horizontal y vertical del proyectil durante su trayectoria. Para ello, el movimiento fue analizado cuadro por cuadro mediante Tracker, previa calibración espacial con una referencia de longitud conocida. Este procedimiento permitió estudiar el comportamiento cinemático del proyectil y comparar los resultados experimentales con el modelo ideal de movimiento parabólico, en el cual se considera que la aceleración horizontal es aproximadamente nula y que la aceleración vertical corresponde a la aceleración gravitacional.

Resultados y análisis

Se graficaron los datos obtenidos en los lanzamientos de los proyectiles para las componentes de posición x y y en función del tiempo. En la Figura 2, correspondiente a la posición horizontal, se observó que los datos presentaron un comportamiento aproximadamente lineal, por lo que se realizó un ajuste lineal. En cambio, en la Figura 3, correspondiente a la posición vertical, los datos mostraron un comportamiento cuadrático, por lo que se aplicó un ajuste polinómico de segundo grado.

Este comportamiento es consistente con el modelo cinemático del movimiento de proyectiles. La posición horizontal puede describirse mediante la ecuación (1), siempre que la aceleración horizontal sea despreciable. Por otra parte, la posición vertical se describe mediante la ecuación (2), debido a la acción de la aceleración gravitacional. De esta forma, los ajustes realizados

permitieron estimar parámetros físicos relevantes, como las componentes de la velocidad inicial y, en el caso del ajuste vertical, una aproximación experimental de la aceleración de la gravedad.

La comparación entre los datos experimentales y los modelos de ajuste permitió evaluar la concordancia del sistema con el modelo ideal de movimiento parabólico. Para la componente horizontal, se empleó el modelo lineal:

$$x(t) = b + mt \quad (7)$$

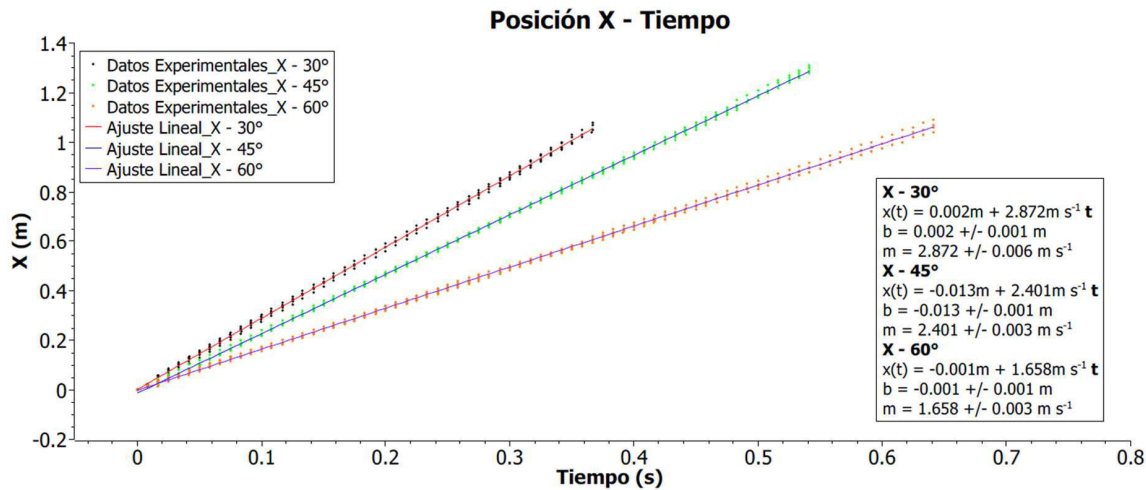


Figura 2. El eje horizontal representa el tiempo t , en segundos, con un intervalo aproximado de 0 a 0.8 s. El eje vertical representa la posición horizontal X , en metros, con un intervalo aproximado de -0.2 a 1.4 m. Los datos experimentales aparecen como puntos discretos: negro para 30°, verde para 45° y naranja para 60°. Sobre cada conjunto se trazó un ajuste lineal de acuerdo con la ecuación (7), donde b representa la posición horizontal inicial y m representa la velocidad horizontal del proyectil. Los ajustes reportados fueron:

$$x_{30^\circ}(t) = 0.002 \text{ m} + (2.872 \text{ m s}^{-1})t \quad (8)$$

$$x_{45^\circ}(t) = -0.013 \text{ m} + (2.401 \text{ m s}^{-1})t \quad (9)$$

$$x_{60^\circ}(t) = -0.001 \text{ m} + (1.658 \text{ m s}^{-1})t \quad (10)$$

Para el lanzamiento a 30°, los parámetros fueron $b = 0.002 \pm 0.001 \text{ m}$ y $m = 2.872 \pm 0.006 \text{ m s}^{-1}$. Para el lanzamiento a 45°, los parámetros fueron $b = -0.013 \pm 0.001 \text{ m}$ y $m = 2.401 \pm 0.003 \text{ m s}^{-1}$. Para el lanzamiento a 60°, los parámetros fueron $b = -0.001 \pm 0.001 \text{ m}$ y $m = 1.658 \pm 0.003 \text{ m s}^{-1}$.

Como se observa en la Figura 2, los datos experimentales presentan una relación aproximadamente lineal entre la posición horizontal y el tiempo para los tres ángulos de lanzamiento. Este comportamiento indica que la componente horizontal del movimiento fue prácticamente uniforme, es decir, que la aceleración horizontal fue despreciable dentro del intervalo experimental.

La pendiente del ajuste lineal disminuyó conforme aumentó el ángulo de lanzamiento. Para 30° se obtuvo una velocidad horizontal de 2.872 m s^{-1} , para 45° una velocidad horizontal de 2.401 m s^{-1} y para 60° una velocidad horizontal de 1.658 m s^{-1} . Esta tendencia coincide con el modelo ideal del movimiento de proyectiles, donde la componente horizontal de la velocidad inicial está dada por la ecuación (5). Por ello, al aumentar el ángulo de lanzamiento, el valor de $\cos \theta$ disminuye y, en consecuencia, también disminuye la velocidad horizontal.

La mayor pendiente corresponde al lanzamiento de 30°, lo que explica que este proyectil avanzara horizontalmente más rápido. El lanzamiento de 60° tuvo la menor pendiente, por lo que su desplazamiento horizontal fue más lento, aunque su tiempo de vuelo fue mayor debido a su mayor componente vertical.

Los interceptos fueron cercanos a cero, aunque no exactamente nulos. Esto sugiere que el origen espacial fue definido de forma razonable, pero con pequeños desplazamientos iniciales asociados al proceso de calibración y seguimiento.

Como se mencionó anteriormente, los datos para la posición vertical y presentaron un comportamiento cuadrático, por lo que se realizó un ajuste de este tipo. El modelo utilizado fue:

$$y(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \quad (11)$$

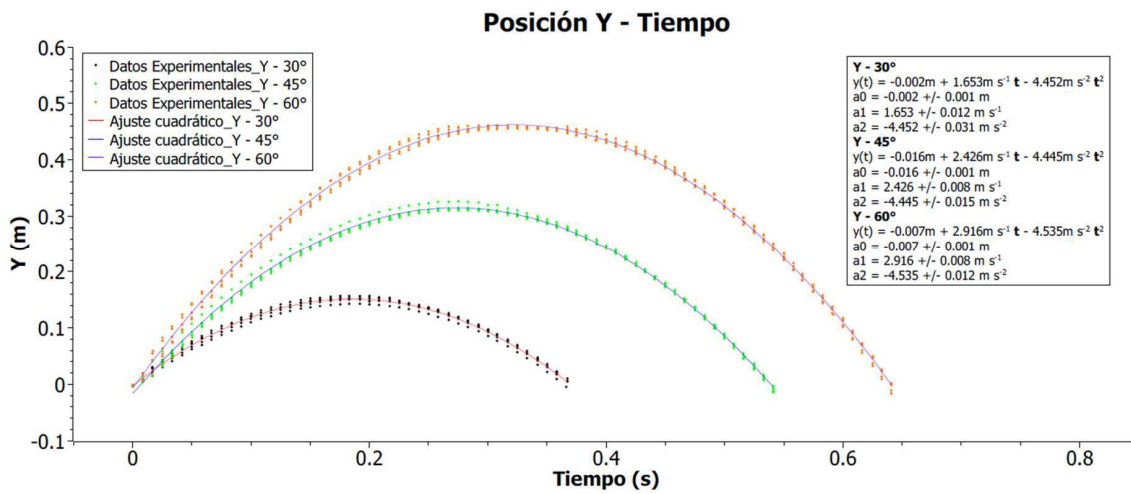


Figura 3. El eje horizontal representa el tiempo t , en segundos, con un intervalo aproximado de 0 a 0.8 s. El eje vertical representa la posición vertical Y , en metros, con un intervalo aproximado de -0.1 a 0.6 m. La gráfica compara tres lanzamientos de proyectil realizados con ángulos iniciales de 30°, 45° y 60°. Los datos experimentales aparecen como puntos discretos: negro para 30°, verde para 45° y naranja para 60°. Sobre cada conjunto de datos se muestra un ajuste cuadrático, correspondiente a la ecuación (11). Los ajustes reportados fueron:

$$y_{30^\circ}(t) = -0.002 m + (1.653 m s^{-1})t - (4.452 m s^{-2})t^2 \quad (12)$$

$$y_{45^\circ}(t) = -0.016 m + (2.426 m s^{-1})t - (4.445 m s^{-2})t^2 \quad (13)$$

$$y_{60^\circ}(t) = -0.007 m + (2.916 m s^{-1})t - (4.535 m s^{-2})t^2 \quad (14)$$

Para el lanzamiento a 30°, los parámetros fueron $a_0 = -0.002 \pm 0.001 m$, $a_1 = 1.653 \pm 0.012 m s^{-1}$ y $a_2 = -4.452 \pm 0.031 m s^{-2}$. Para el lanzamiento a 45°, los parámetros fueron $a_0 = -0.016 \pm 0.001 m$, $a_1 = 2.426 \pm 0.008 m s^{-1}$ y $a_2 = -4.445 \pm 0.015 m s^{-2}$. Para el lanzamiento a 60°, los parámetros fueron $a_0 = -0.007 \pm 0.001 m$, $a_1 = 2.916 \pm 0.008 m s^{-1}$ y $a_2 = -4.535 \pm 0.012 m s^{-2}$.

Los tres conjuntos de datos presentan una tendencia parabólica cóncava hacia abajo, característica del movimiento vertical de un proyectil bajo aceleración gravitatoria. La componente vertical inicial de la velocidad aumentó con el ángulo de lanzamiento: fue $1.653 m s^{-1}$ para 30°, $2.426 m s^{-1}$ para 45° y $2.916 m s^{-1}$ para 60°. Este comportamiento es consistente con la ecuación (6), según la cual la componente vertical de la velocidad inicial crece al aumentar el ángulo de disparo.

El coeficiente cuadrático fue negativo en los tres casos, lo que indica una aceleración dirigida hacia abajo. Como en el modelo cinemático vertical se cumple:

$$y(t) = y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}a_y t^2 \quad (15)$$

$$a_y = 2a_2 \quad (16)$$

A partir de los ajustes se obtuvieron las siguientes aceleraciones verticales aproximadas:

$$a_{y,30^\circ} = -8.904 \text{ m s}^{-2} \quad (17)$$

$$a_{y,45^\circ} = -8.890 \text{ m s}^{-2} \quad (18)$$

$$a_{y,60^\circ} = -9.070 \text{ m s}^{-2} \quad (19)$$

Estos valores fueron cercanos al valor esperado para la aceleración gravitacional, aunque ligeramente menores en magnitud que $g \approx 9.81 \text{ m s}^{-2}$. La diferencia sugiere la presencia de errores sistemáticos asociados al método de medición, la calibración espacial, la tasa de cuadros del video, el seguimiento del centro del proyectil o pequeños efectos de perspectiva.

La altura máxima también aumentó con el ángulo: el lanzamiento a 30° alcanzó la menor altura, el de 45° una altura intermedia y el de 60° la mayor elevación. Esto confirma que el incremento de la componente vertical de la velocidad inicial produjo trayectorias con mayor tiempo de ascenso y mayor desplazamiento vertical máximo.

La principal consideración metodológica es que los valores de aceleración vertical obtenidos fueron ligeramente menores en magnitud que el valor teórico de la gravedad. Esto puede atribuirse a errores de calibración de escala, perspectiva de la cámara, resolución temporal del video, selección manual o automática del centro del proyectil en Tracker, distorsión óptica y pequeñas variaciones en el mecanismo de disparo. También debe considerarse que los interceptos a_0 no fueron exactamente cero, lo cual indica pequeños desfases en la definición del origen espacial. Además, la gráfica no muestra barras de error punto a punto, por lo que la dispersión visual debe interpretarse junto con las incertidumbres reportadas en los parámetros del ajuste.

En conjunto, las dos gráficas muestran que el movimiento del proyectil se comportó de acuerdo con el modelo cinemático clásico. La componente horizontal presentó una dependencia lineal con el tiempo, lo que indicó velocidad horizontal aproximadamente constante. En contraste, la componente vertical presentó una dependencia cuadrática, característica de un movimiento bajo aceleración constante. Esta combinación de comportamientos confirma la independencia entre los movimientos horizontal y vertical: el primero estuvo dominado por la velocidad inicial horizontal, mientras que el segundo estuvo determinado por la componente vertical de la velocidad inicial y por la aceleración gravitatoria.

Los resultados también mostraron que el ángulo de lanzamiento redistribuyó la velocidad inicial entre sus componentes. A 30° se obtuvo la mayor velocidad horizontal y la menor velocidad vertical; a 60° ocurrió lo contrario; y a 45° se obtuvo una distribución intermedia. Esta relación explica las diferencias observadas en altura máxima, tiempo de vuelo y alcance horizontal. El lanzamiento de 45° presentó el mayor alcance observado en la gráfica, lo cual es consistente con el comportamiento esperado para proyectiles lanzados con rapidez inicial semejante y alturas inicial y finales comparables.

Conclusiones

El análisis experimental permitió estudiar el movimiento de un proyectil lanzado con velocidad inicial para tres ángulos de disparo. La componente horizontal mostró una dependencia aproximadamente lineal con el tiempo, lo que indicó que la aceleración horizontal fue despreciable dentro del intervalo medido. En cambio, la componente vertical presentó una dependencia cuadrática, asociada a una aceleración vertical constante dirigida hacia abajo.

Los ajustes realizados confirmaron que el aumento del ángulo de lanzamiento redujo la componente horizontal de la velocidad inicial y aumentó la componente vertical. Esta redistribución explicó las diferencias observadas en la altura máxima, el tiempo de vuelo y el alcance horizontal. Asimismo, las aceleraciones verticales obtenidas a partir de los ajustes fueron cercanas al valor esperado de la aceleración gravitacional, aunque ligeramente menores en magnitud, lo que sugiere la influencia de errores sistemáticos relacionados con la calibración, la perspectiva de la cámara, la resolución temporal del video y el seguimiento del centro del proyectil.

En general, los resultados fueron consistentes con la independencia entre los movimientos horizontal y vertical y con la trayectoria parabólica prevista para el movimiento de proyectiles en condiciones ideales. Como línea de trabajo futuro, sería conveniente incorporar barras de error punto a punto, mejorar la calibración espacial, controlar con mayor precisión la alineación de la cámara y repetir las mediciones con una tasa de cuadros más alta para reducir la incertidumbre en la estimación de velocidades y aceleraciones.

Bibliografía

[1] R. A. Serway y J. W. Jewett, Física para ciencias e ingeniería, volumen 1, 9.^a edición, Cengage Learning, México, páginas sobre leyes de Newton.

[2] <https://opensourcephysics.github.io/tracker-website/> Fecha de consulta: 11 de junio de 2026.

[3]

<https://drive.google.com/drive/folders/1bM56u6zyPr0nkBIsZMVgH1epyR7QAAW2?usp=sharing>